Adı Soyadı:

Numarası: **22.06.2022**

DİFERANSİYEL DENKLEMLER-II FİNAL SINAVI SORULARI

NOT: Sadece <u>4 soru</u> cevaplandırınız.

Cevap Anahtarı

1. $(x-1)y''-xy'+y=0$ denkleminin bir özel çözümü $y_1(x)=e^{x}$ ise denklemin genel çözümünü bulunuz.

2. Temel çözüm kümesi $T=\{1, x, e^{-x}\cos 3x, e^{-x}\sin 3x\}$ olan diferansiyel denklemi bulunuz.

3. $y^{(4)}+y''=\sin x-2$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

4. $y'''+3y''-4y=e^{-x}$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

5. $2xy''+y'=x^2$ denkleminin $y(0)=0,\ y'(0)=0$ koşullarını sağlayan çözümünü bulunuz.

6. $(x^2-1)y''-2xy'+2y=0$ denklemi için aşağıdakilerden doğru olanı (veya olanları) belirtip, açıklayınız.

$$y''-\underbrace{\frac{2x}{x^2-1}}_{P_1(x)}y'+\underbrace{\frac{2}{x^2-1}}_{P_2(x)}y=0$$

a) $x_0=0$ bir adi noktadır. D

P_1 ve P_2 $x=0$ da sürekli olduğundan $x_0=0$ adi noktadır

b) $u=u(x)$ olmak üzere $y=xu$ dönüşümü ile denklemin çözümü bulunabilir. D

$y_1=x$ için $y_1'=1$ $y_1''=0 \Rightarrow 0-2x.1+2x=0$ olup $y_1=x$ bir özel çözüm olacağından $y=xu$ dönüşümü ile denklem çözülür

~~c)~~ $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-2)^{n+r}$ formunda seri çözümü vardır. Y

$x_0=2$ için P_1 ve P_2 fonksiyonları sürekli olacağından bu nokta adi nokta olup $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-2)^n$ seri çözümü vardır.

Doç. Dr. Fatma HIRA

1 çözüm $y=y_1.u$, $u=u(x)$ dönüşümü ile veya Abel formülü ile bulunabilir.

Abel formulünden $y''-\frac{x}{x-1}y'+\frac{1}{x-1}y=0$ yazılırsa

$$\begin{vmatrix} e^x & y \\ e^x & y' \end{vmatrix} = c_1 . e^{-\int -\frac{x}{x-1}dx} \Rightarrow e^x y'-e^x y = c_1 . e^{\int (1+\frac{1}{x-1})dx}$$

$$e^x y'-e^x y = c_1 . e^{x+\ln(x-1)}$$

$$\frac{1}{e^{2x}} /\quad y'-y = c_1.(x-1).e^x$$

$$\left(\frac{y}{e^x}\right)' = c_1 . e^{-x}(x-1)$$

$$\frac{y}{e^x} = c_1.\int e^{-x}(x-1)dx + c_2$$

$x-1$	$+$	e^{-x}
1	$-$	$-e^{-x}$
0		e^{-x}

$$\frac{y}{e^x} = c_1\left(-xe^{-x}+\cancel{e^{-x}}-\cancel{e^{-x}}\right)+c_2$$

$$\boxed{y=-c_1x+c_2e^x}$$ bulunur.

2 $1, x$ için $\lambda=0$ katlı kök λ^2 çarpan

$e^{-x}\cos 3x$, $e^{-x}\sin 3x$ için $\lambda=-1+3i$, $\lambda=-1-3i$ kompleks kök

$$\ell(\lambda)=\lambda^2(\lambda+1-3i)(\lambda+1+3i)$$

$$\ell(\lambda)=\lambda^2(\lambda^2+2\lambda+10)$$

$$\ell(\lambda)=\lambda^4+2\lambda^3+10\lambda^2$$

için $\boxed{y^{(4)}+2y'''+10y''=0}$ olup denklem bulunur.

③ $y^{(4)} + y'' = 0 \Rightarrow \lambda^4 + \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = i, \lambda_4 = -i$ olup

$y_h = c_1 + c_2 x + c_3 \sin x + c_4 \cos x$ olur.

- $y^{(4)} + y'' = \sin x$ için özel çözüm $y_{ö1} = \frac{1}{D^4 + D^2} \sin x$ $D^2 \to -1$ için payda 0 oluyor

$$v(x) = \frac{1}{D^4 + D^2} e^{ix} = \frac{1}{D^2 (D+i)(D-i)} e^{ix} = -\frac{1}{2i} \frac{1}{D-i} e^{ix} = -\frac{1}{2i} e^{ix} \frac{1}{D} 1 = -\frac{1}{2i} e^{ix} x$$

$D \to D+i$

$$= \frac{1}{2} i x e^{ix} = \frac{1}{2} ix (\cos x + i \sin x) = -\frac{1}{2} x \sin x + i \frac{1}{2} x \cos x$$

olup $y_{ö1} = \operatorname{Im} v(x) = \frac{1}{2} x \cos x$ bulunur.

- $y^{(4)} + y'' = -2$ için özel çözüm $y_{ö2} = A + Ax + Ax^2$ olarak aranırsa

$y_{ö2}' = 2Ax, \quad y_{ö2}'' = 2A, \quad y_{ö2}''' = 0, \quad y_{ö2}^{(4)} = 0 \Rightarrow 0 + 2A = -2 \Rightarrow A = -1$

$y_{ö2} = -x^2$ bulunur.

genel çözüm $y = y_h + y_{ö1} + y_{ö2} = c_1 + c_2 x + c_3 \sin x + c_4 \cos x + \frac{1}{2} x \cos x - x^2$

④ $y''' + 3y'' - 4y = e^{-x}$

$y''' + 3y'' - 4y = 0 \Rightarrow \lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 = 0$, $\lambda = 1$ kök olduğundan $\lambda - 1$ çarpan olup

$\pm 4, \pm 1, \pm 2$

polinom bölmesi yapılırsa

$(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = -2$ kökleri bulunur.

$y_h = c_1 e^x + e^{-2x}(c_2 + c_3 x)$ olur.

$$y_ö = \frac{1}{D^3 + 3D^2 - 4} e^{-x} \underset{a=-1}{=} \frac{1}{(-1)^3 + 3(-1)^2 - 4} e^{-x} = \frac{1}{-1+3-4} e^{-x} = -\frac{1}{2} e^{-x}$$

bulunur.

genel çözüm $y = y_h + y_ö = c_1 e^x + e^{-2x}(c_2 + c_3 x) - \frac{1}{2} e^{-x}$

⑤ 1. yol: Laplace dönüşümü ile çözülür.

Cauchy Euler denklemi

x ile çarpılırsa $2x^2 y'' + xy' = x^3$

2. yol: Denklem x ile çarpılırsa $2x^2y''+xy'=x^3$ Cauchy Euler denklemi olup $x = e^t$ dönüşümü ile sabit katsayılı denkleme indirgenerek çözülür.

3. yol: $\boxed{y' = u}$ dersek $y'' = u'$ olup denklem $2xu' + u = x^2$ yani

$u' + \frac{1}{2x} u = \frac{x}{2}$ lineer denklemine indirgenir. $\lambda(x) = e^{\int \frac{1}{2x} dx} = e^{\frac{1}{2} \ln x} = x^{\frac{1}{2}}$

için $x^{\frac{1}{2}} . u = \int \frac{x}{2} . x^{\frac{1}{2}} dx + c_1 \Rightarrow x^{\frac{1}{2}} u = \frac{1}{5} x^{\frac{5}{2}} + c_1 \Rightarrow u = \frac{1}{5} x^2 + c_1 x^{-\frac{1}{2}}$

bulunur.

$y' = u \Rightarrow y' = \frac{1}{5} x^2 + c_1 x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow y = \frac{x^3}{15} + 2c_1 x^{\frac{1}{2}} + c_2$ bulunur.

$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = c_2$

$y'(0) = 0 \Rightarrow 0 = 0 + \frac{c_1}{0} \Rightarrow c_1 = 0$ olmalı $\Rightarrow \boxed{y = \frac{x^3}{15}}$ istenen özel çözüm

CamScanner ile tarandı